

NÚMEROS

Revista de Didáctica de las Matemáticas

<http://www.sinewton.org/numeros>

ISSN: 1887-1984

Volumen 102, noviembre de 2019, páginas 83-96

El trabajo cooperativo en Matemáticas

Isabel García Esteban (Colegio San Vicente de Paúl. Benavente)

Resumen	Desarrollar el trabajo cooperativo en Matemáticas potencia el pensamiento lógico entre compañeros, desarrolla la abstracción y mejora los resultados académicos de los alumnos.
Palabras clave	Trabajo cooperativo. Aprendizaje competencial. Personalización del aprendizaje. Estructuras cooperativas. Metodología.
Abstract	Developing cooperative work in Math increases logical thinking among students, builds up abstraction and improves the students' academical results. Cooperative work is one of the fundamental bases in an inclusive and skill-based learning.
Keywords	Cooperative work. Skill-based learning. Personal learning. Cooperative structures. Methodology.

1. Introducción

Distintas investigaciones avalan el trabajo cooperativo como una metodología idónea para el aprendizaje de las Matemáticas.

El trabajo cooperativo (en adelante TC) contribuye a que los estudiantes reduzcan esa inseguridad ante la asignatura; hace que les guste más la materia y sientan menos rechazo, lo que incrementa la motivación y por tanto, una mejor disposición para aprender.

En las Matemáticas debemos “enseñar a aprender” (María Antonia Canals, 2008, págs. 13-16), fomentar el aprender haciendo, permitir que el alumno se equivoque, que busque soluciones, que verbalice razonamientos, etc. Todo esto se desarrolla mejor si se trabaja en cooperativo.

Es importante destacar que el aprendizaje cooperativo no es un objetivo en sí mismo. El objetivo que siempre perseguimos es que el alumnado aprenda y desarrolle sus habilidades matemáticas, y el TC es una herramienta potentísima para lograrlo. Debemos conseguir que los alumnos “aprendan juntos a hacer las cosas solos” (Zariquiey, 2018, págs. 12-17).

Para que un grupo cooperativo sea efectivo, Spencer Kagan y Johnson & Johnson (Johnson & Johnson, 1990, pág. 8), coinciden en que deben cumplirse dos principios básicos: la interdependencia positiva y la responsabilidad individual. Esta tarea no se consigue de manera automática, sino que



**Sociedad Canaria Isaac Newton
de Profesores de Matemáticas**

El trabajo cooperativo en Matemáticas

I. García Esteban

debemos construir ese “clima cooperativo” para que se cumplan los dos principios básicos, en los que la configuración de los miembros del equipo base es fundamental. No podemos olvidarnos del trabajo individual del alumno, por lo que debemos combinar momentos de trabajo individual con momentos de trabajo cooperativo.

También el TC es un modelo inclusivo (Pujolàs, 1994, págs. 24-25.), una solución fantástica para afrontar la heterogeneidad de las aulas. El hecho de que los alumnos con dificultades sean ayudados por sus compañeros además de por el profesor, contribuye a mejorar los resultados académicos; esto es un hecho evidente y ventajoso para estos alumnos.

Más complicado es ver las ventajas desde el otro lado: los alumnos que no tienen dificultades y que se ven “obligados” a prestar ayuda a sus compañeros. Para ellos, inicialmente sienten que ayudar frena su avance y progreso personal, por eso, nuestra labor como docentes es evidenciar que el trabajo con otros compañeros, no sólo los enriquece, sino que también les permite alcanzar cotas de éxito mayor a las que sólo puede llegar con la ayuda de los demás. Convencer de ello a estos alumnos es un factor clave.

En mi caso personal, tratándose de alumnos de Secundaria, lo he conseguido explicándoles la Taxonomía de Bloom (Bloom.1971. págs. 13-19) Cuando un alumno ofrece ayuda a un compañero, explica, aplica e incluso es capaz de poner ejemplos diferentes, está alcanzando los niveles superiores de dicha Taxonomía.

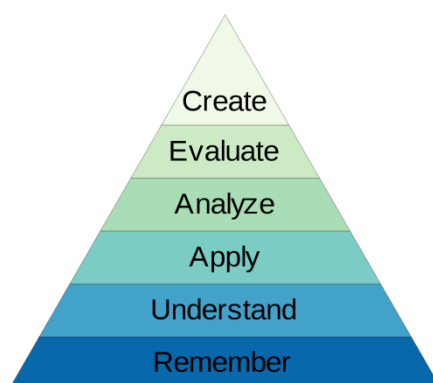


Figura 1. Representación de la Taxonomía de Bloom.

2. ¿Por qué trabajar de forma cooperativa en Matemáticas?

El alumno construye su aprendizaje a través de interacciones, teniendo especial importancia la interacción social. Al establecerse distintos grados de interacción el alumno accede al conocimiento de maneras diferentes y en situaciones diferentes. Puede descubrir conceptos, contrastar o resolver dudas con los demás, descubrir sus puntos fuertes y débiles, modificar sus estrategias a partir de las de los compañeros, además, compartir conocimiento, discriminar, en definitiva, ver las distintas alternativas.

En la siguiente infografía, se muestran las distintas interacciones. Este esquema lo explico en clase a los alumnos con dos objetivos claros:

- Fomentar y convencer a los alumnos de las ventajas del trabajo cooperativo.

- Aclarar que pedir ayuda a un compañero o al grupo cooperativo no es dar la respuesta o hacer la tarea, sino dar pistas y orientar a la realización de la misma.



Figura 2. Tipos de interacciones en el trabajo cooperativo.

3. Estructuras de TC idóneas para el aprendizaje de Matemáticas.

Las tareas académicas que deben realizar los alumnos se concretan en las estructuras cooperativas. Cada una de ellas definen un modo concreto de trabajo, garantizando la participación equitativa y la interacción simultánea.

3.1. Para la orientación hacia la tarea.

- **Entrevista simultánea:** Por ejemplo, al comenzar un tema: ¿Qué sabemos de...? Se trabaja por parejas. El alumno A entrevista al alumno B, y anota sus respuestas. Posteriormente, el alumno B entrevista al alumno A, y anota sus respuestas. Se realiza una puesta en común, y la lluvia de ideas nos da una visión general del tema y se van añadiendo, corrigiendo o enfatizando las ideas clave.



- **Rutina de pensamiento: veo- pienso- me pregunto.** ¿Qué veo? ¿Qué pienso? ¿Qué me pregunto?
- **Cuestionario inicial.** El profesor realiza un cuestionario inicial en grupos cooperativos, o bien, de forma individual y después los alumnos comparan sus respuestas para llegar a un acuerdo.
- **Saco de dudas.** Esta estructura puede realizarse en cualquier momento del aprendizaje. Consiste en recopilar dudas surgidas tras un vídeo Flipped, una explicación, una actividad, etc. Se resuelven o aportan estrategias en grupo y se ponen en común en el grupo- clase.

3.2. Para la presentación de contenidos

- **Parada de tres minutos:** en una explicación el profesor introduce una parada de tres minutos, en los que los grupos tratan de resumir con una frase los contenidos explicados y redactan dos preguntas sobre ese tema. Posteriormente, los equipos plantean las preguntas al resto de grupos y se resuelven.
- **El aprendizaje parte de una pregunta:** funciona muy bien si los alumnos son más participativos que receptivos. Esta simple estrategia genera nuevas preguntas de los alumnos, investigar, demostrar o querer profundizar más en el tema.
- **Rompecabezas cooperativo.** Muy útil cuando la información puede dividirse en partes. Se distribuyen materiales al grupo cooperativo base y cada uno de los miembros del grupo se encarga de una parte. Analizan y aprenden la información hasta volverse expertos en ella. Después se reunirán los expertos de cada parte, creando el comité de expertos, y se realiza una puesta en común, se resuelven dudas, practican, completan la información, etc. Finalmente, se disuelven los comités de expertos y llevan la información a su grupo. Cada uno debe enseñar su parte a los otros miembros del equipo y deben aprender lo que otros le enseñan. Ejemplo: rompecabezas con decimales puede verse en <https://www.conectadosalasmates.com/2018/02/rompecabezas-cooperativo-para-los.html>

3.3. Para el procesamiento de nueva información

- **Materiales manipulativos:** cartas, fichas, regletas, etc.
- **Lápices al centro:** idónea para los problemas matemáticos. Se lee en voz alta el enunciado, cada miembro del equipo expresa su opinión, se acuerda una respuesta o estrategia. Después se termina de manera individual.
- **1-2-4:** se marcan 3 tiempos de trabajo. 1 para el trabajo individual, 2 cuando se trabaja por parejas, para terminar en 4, donde se realiza la puesta en común.

3.4. Para la metacognición

- **Folio giratorio:** se realiza un inventario, ideas clave o contenidos trabajados. El folio se coloca en el centro de la mesa y va rotando, para que, cada miembro del equipo escriba una idea. Se pueden después intercambiar los folios con los de otros grupos y añadir lo que no esté recogido.

4. Actividades diseñadas para trabajar en cooperativo.

A continuación, expongo algunas de las actividades que realizamos en clase pensadas para trabajar de forma cooperativa.

4.1. Dados algebraicos.

Utilizamos dados algebraicos para repasar las operaciones con monomios, a modo de concurso en grupos cooperativos.

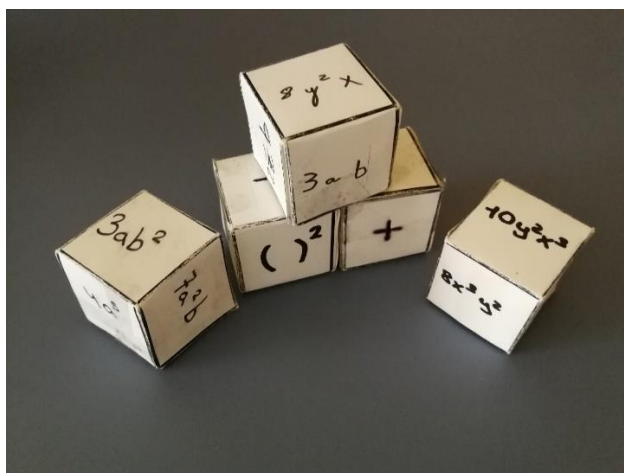


Figura 3. Dados algebraicos creados por alumnos de 2º de ESO

Materiales:

Desarrollo plano de un cubo. Necesitaremos realizar dos dados, un dado algebraico y un dado de operaciones aritméticas.

Preparación del juego:

1. Cada alumno dispondrá del desarrollo plano de un cubo que rellenará con monomios.
2. Se dispondrá de dados de operaciones, en las que tendremos: suma, resta, producto, cociente y potenciación.
3. Completamos las caras del cubo con monomios. Fijamos 3 partes literales comunes para todos (de esta forma tendremos monomios semejantes en todos los dados de la clase) que escribirán en tres caras, con el coeficiente que ellos elijan. En las otras 3 caras restantes, el alumno escribirá los monomios que él quiera.

Desarrollo del juego:

1. Se juega por parejas, cada alumno con su dado algebraico y un dado de operaciones.
2. Comienza la ronda el alumno que saque el monomio de mayor grado, en caso de tener el mismo grado, comenzará el que tenga mayor coeficiente.
3. Se tiran los dados algebraicos y el de las operaciones, los jugadores resuelven la operación y el primero que responda correctamente ganará el duelo.
4. El ganador se apunta el tanto en la tabla siguiente:



El trabajo cooperativo en Matemáticas

I. García Esteban

nombre	Á	L	G	E	B	R	A

5. El ganador será el que antes complete la palabra ÁLGEBRA.
6. Se realizarán rondas con los distintos compañeros. Una posibilidad es:
7. 1º ronda: con mi compañero de hombro de mi grupo cooperativo.
8. 2º ronda: con mi compañero de frente de mi grupo cooperativo.
9. 3º y rondas sucesivas: con el compañero de cada grupo cooperativo que tenga el mismo rol.
10. De esta manera, el alumno practica con operaciones de monomios y en cada ronda distintos, e intercambia resultados e impresiones con compañeros diferentes.

4.2. Creamos ecuaciones de 2º grado.

Los alumnos toman contacto por primera vez con las ecuaciones de 2º grado en Matemáticas de 2º de ESO. Lo habitual es comenzar a resolver ecuaciones de 2º grado identificando los tipos de ecuaciones, completas e incompletas. En su lugar, iniciamos el tema con los alumnos creando la ecuación de 2º grado a partir de las de primer grado. Uniendo factores y soluciones.

Objetivos:

- Identificar identidades notables, cuadrado de un binomio y suma por diferencia, y asociar resultados a la ecuación de 2º grado de un tipo en concreto (ecuación completa o incompleta).
- Utilizar operaciones algebraicas básicas: despejar incógnita y multiplicación, para crear las ecuaciones de 2º grado.
- Comprobar con los factores y con la ecuación de 2º grado las soluciones.
- Utilizar estrategias (por ejemplo la relación entre el término independiente y los factores) y procesos de razonamiento para formar las ecuaciones, profundizando en el proceso y llegando a una generalización.
- Profundizar y discriminar ecuaciones completas e incompletas.
- Crear ecuaciones de 2º grado con las soluciones que ellos quieran.

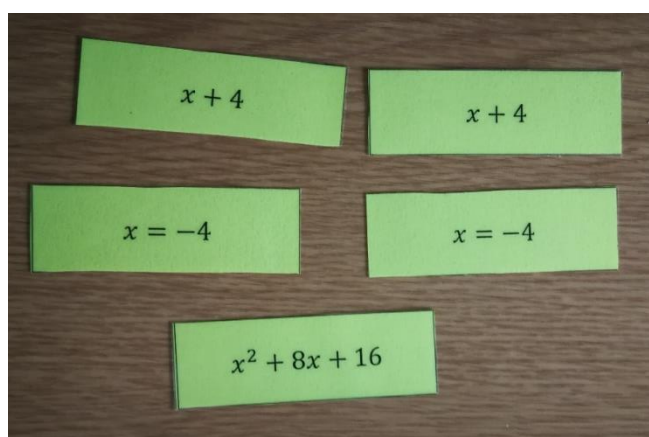


Figura 4. Fichas de la dinámica creando ecuaciones de segundo grado.

Material:

Para cada grupo cooperativo fichas de factores, soluciones y ecuaciones de 2º grado.

Dinámica:

Los alumnos deben asociar las tarjetas de factores con las tarjetas de soluciones o raíces y posteriormente multiplicar dos factores para obtener una ecuación de segundo grado, y encontrar dicha tarjeta de solución.

GRUPO 2

FACTORES	SOLUCIÓN	ECUACIÓN 2º GRADO
$x + 5$	$x = -5$	$x^2 + 2x - 15$
$x - 3$	$x = 3$	
$x + 1$	$x = -1$	$x^2 - 1$
$x - 1$	$x = 1$	
$3x - 6$	$x = 2$	$15x^2 - 24x - 12$
$5x + 2$	$x = -2/5$	
$x + 2$	$x = -2$	$x^2 + 5x + 6$
$x + 3$	$x = -3$	
$x + 8$	$x = -8$	$x^2 + 7x - 8$
$x - 1$	$x = 1$	
x	$x = 0$	$x^2 + 2x$
$x + 2$	$x = -2$	
$x + 2$	$x = -2$	$x^2 + 4x + 4$
$x + 2$	$x = -2$	
$x - 7$	$x = 7$	$x^2 - 11x + 28$
$x - 4$	$x = 4$	

Figura 5. Soluciones del grupo cooperativo 2 de la dinámica creando ecuaciones de segundo grado.

4.3. Trabajando con funciones utilizando la inteligencia cinestésica- corporal.

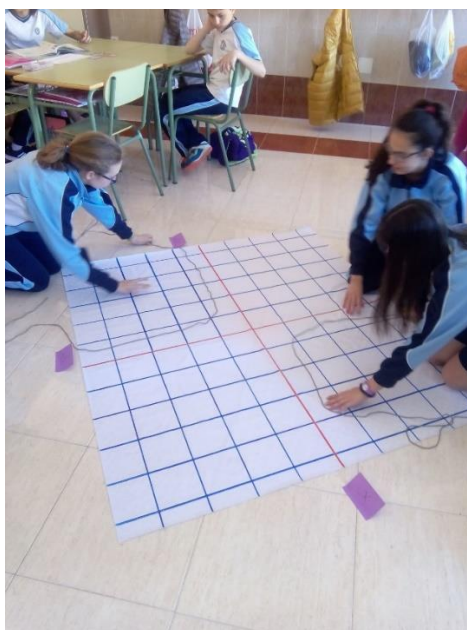


Figura 6. Imagen de la dinámica Funcionando en cooperativo.**Objetivos:**

- A través del trabajo cooperativo repasar los distintos tipos de funciones y sus características.
- Autoevaluación y coevaluación del trabajo cooperativo, mediante rúbrica.
- Aprendizaje activo.
- Alumnos que se organizan y trabajan juntos, de manera eficiente y creativa, utilizando los roles.
- Motivación de los alumnos.

Material:

- Manta de juegos cuadriculada (plástico, mantel o similar)
- Cartas de retos.
- Cuerdas para representar las funciones.
- Chapas, tapones o similar para representar puntos.
- Rúbrica de autoevaluación y coevaluación del trabajo cooperativo.

Dinámica:

- Grupos base de cooperativo: 4- 5 alumnos. Se reparten las rúbricas para la evaluación y coevaluación a los grupos cooperativos, dejando claro lo que tienen que evaluar y lo que el profesor va a valorar.
- La dinámica se desarrolla por turnos.
- El equipo que sale a jugar elige una carta, la lee en voz alta y planifican el reto en 30 segundos, discutiendo qué tipo de función es y que material han de utilizar (su propio cuerpo, las chapas o las cuerdas). A continuación, disponen de 1 minuto para dibujar o representar la función de la carta. El resto de los grupos opinan al final del tiempo si es correcto o no y el motivo.
- Participan los distintos grupos y se realizan varias rondas.
- Al final de la clase se rellenan las rúbricas de evaluación (auto y coevaluación)
- Tiempo para la dinámica completa: 1 sesión de clase.

5. ¿Y la atención a la diversidad?

Además del trabajo ordinario utilizando las técnicas expuestas anteriormente con el TC, podemos consolidar y atender a la diversidad teniendo en cuenta lo siguiente:

5.1. Presentando los contenidos en distintos formatos.

Vídeos flipped, materiales manipulativos, visual thinking, etc. Teniendo en cuenta las Inteligencias Múltiples. Desarrollando y facilitando la comprensión matemática.

5.2. Planteando actividades multinivel.

Nuestras aulas son heterogéneas, y nuestro reto es enganchar a todos. Debemos tener especial atención en los alumnos que tienen interés, pero tienen dificultades de aprendizaje y no pueden alcanzar metas extraordinarias, por consiguiente, se estructuran actividades multinivel, en las que

inicialmente se presentan las actividades comunes, en las que todos participan y éstas van derivando en otras de distintos niveles. De forma que todos alcanzan la meta.

Este proceso se explica en la siguiente infografía:

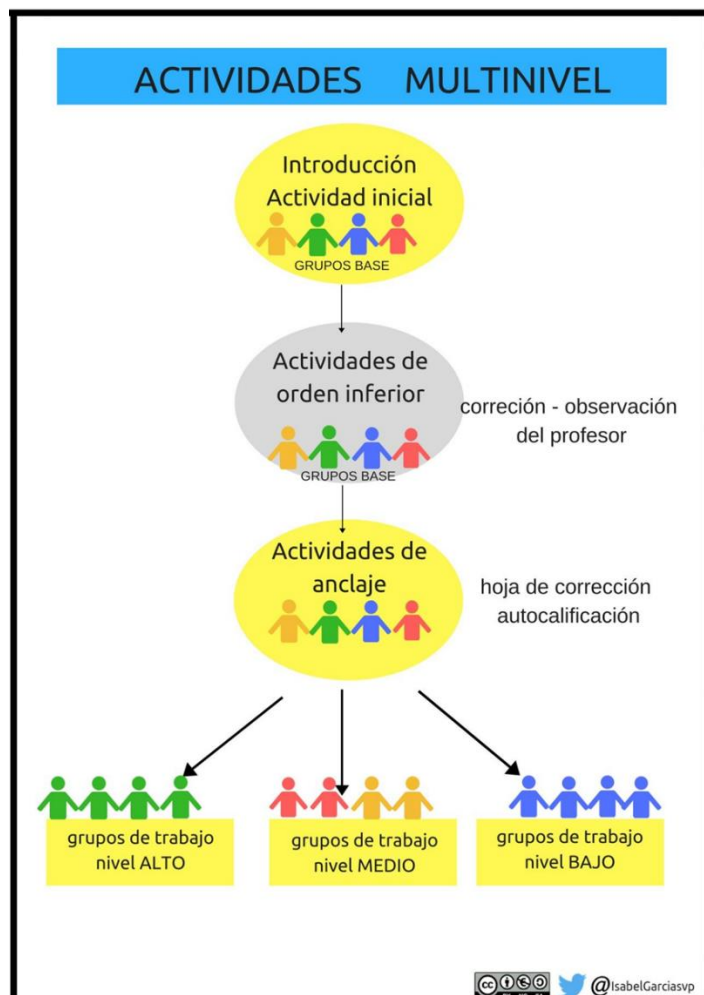


Figura 7. Infografía que explica la secuencia de las actividades multinivel.

6. Cómo calificar el trabajo cooperativo.

Para que un equipo funcione y trabaje bien, además de la interdependencia positiva y la responsabilidad individual, es importante que exista un reflejo de este trabajo en las calificaciones. Los alumnos tienen que ser conscientes de que la actuación de cada miembro del equipo va a afectar en la nota del compañero.

En la calificación del trabajo cooperativo hay que valorar no sólo el rendimiento académico, sino también el esfuerzo realizado y lo que el alumno es capaz de aportar a su grupo cooperativo.

En mi caso, integrar la calificación del trabajo cooperativo en la asignatura de Matemáticas ha sido más fácil gracias a la realización de los exámenes cooperativos.



6.1. Exámenes cooperativos.

El examen cooperativo, es una herramienta más en el proceso de evaluación, que se realiza al menos una vez al trimestre.

¿Por qué realizar un examen cooperativo?

- Porque son una forma efectiva de integrar la formación en el proceso de aprendizaje. Durante el examen cooperativo los alumnos no sólo demuestran lo que saben, sino que lo ponen en práctica. Esta actividad exige dialogar, discutir, consensuar y argumentar respuestas. Es una práctica que genera por tanto, aprendizaje.
- Porque se evalúan distintas competencias: lingüística, matemática, aprender a aprender, competencia social y cívica y sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
- porque un cambio metodológico implica necesariamente un cambio en la manera de evaluar.
- Porque implica llegar al máximo nivel de conocimiento de la Taxonomía de Bloom, ya que exige crear un producto resultado de una reflexión, comprensión y análisis de la tarea.
- Porque el esfuerzo individual beneficia al equipo. Y por ello, se refuerza la interdependencia positiva entre los miembros del grupo cooperativo.
- Porque los exámenes cooperativos son una herramienta integradora. Implica un compromiso con los miembros del equipo para un fin común.
- Porque es un “simulacro” de la vida real. Actualmente, los entornos laborales, exigen saber trabajar de forma coordinada, en grupos de trabajo y teniendo en cuenta las opiniones de los demás.
- Porque atiende a la diversidad. Si los grupos base son heterogéneos, los alumnos con dificultades leves de aprendizaje son ayudados y conducidos por sus compañeros. Esta ayuda es bidireccional, ya que, mientras un alumno ayuda a otro, uno se beneficia por obtener una explicación, más contextualizada, y el otro, refuerza y asienta sus conocimientos, por lo tanto, consigue un aprendizaje significativo. En el caso de niveles más heterogéneos, se puede hacer un grupo homogéneo y adecuar las pruebas al nivel de cada equipo.



Figura 8. Alumnos realizando un examen cooperativo.

Cómo se realiza el examen cooperativo:

En grupos base de cooperativo formados por 4 o 5 alumnos.

Es importante señalar que la prueba no deber ser ejercicios rutinarios pero en cooperativo. Debe ser una tarea más competencial, es decir, en la que los alumnos deben aplicar lo aprendido, con una tarea más cercana a la realidad, contextualizando el aprendizaje. De ahí, los exámenes cooperativos que se realizan en la asignatura de matemáticas suelen ser con materiales manipulativos, o actividades relacionadas con el entorno más cotidiano, o bien, un caso práctico de aplicación.

La dinámica se puede realizar en grupos migratorios, es decir, cada rincón una tarea, teniendo un tiempo limitado en cada rincón. El equipo resuelve las actividades planteadas, manipulando materiales y realizando cálculos en su hoja.

Todos los miembros del grupo cooperativo deben tener los mismos resultados. Es por ello que cada alumno debe discutir, analizar y justificar sus respuestas, para llegar juntos al consenso. Se coordinan estrategias, resoluciones, se gestionan tiempos y funciones de los roles del equipo. Al final de la clase se recoge uno de los trabajos de cada grupo, asignados previamente con números del 1 al 5, eligiendo un número al azar.

Tiempo para la dinámica completa: una sesión de clase.

Durante los exámenes cooperativos el papel del profesor es meramente observador.

- El profesor pasea por la clase. Observa cómo trabaja cada equipo.
- Revisa que no exista un reparto de tareas. Todos los miembros del equipo deben estar trabajando en la misma tarea.

Ejemplos prácticos pueden ser:**6.1.1. Examen cooperativo en grupos migratorios.**

Durante el mismo, los grupos cooperativos resolvían retos en distintos rincones de la clase en el que tenían que aplicar la proporcionalidad con fotografías, mapas, figuras geométricas, etc. Esta actividad es una actividad además de cooperativa, formativa y evaluable.

El desarrollo es el siguiente:

- Grupos base de cooperativo: 4- 5 alumnos.
- La dinámica en grupos migratorios. Cada rincón una tarea. 8 minutos en cada rincón.
- El equipo resuelve la actividad planteada de cada rincón, manipulando materiales y realizando cálculos en su hoja.



El trabajo cooperativo en Matemáticas

I. García Esteban

- Todos los miembros del grupo cooperativo deben tener los mismos resultados. Es por ello que cada alumno debe discutir, analizar y justificar sus respuestas, para llegar juntos al consenso.
- Al final de la clase se recoge uno de los trabajos de cada grupo, asignados previamente con números del 1 al 5, eligiendo un número al azar.
- Tiempo para la dinámica completa: 1 sesión de clase.
- Rincón 1: calcular la escala de una foto.
- Rincón 2: calcular la razón de proporcionalidad o semejanza.



Figura 9. Actividad del examen cooperativo rincón 2.

- Rincón 3: calcular la distancia entre dos ciudades en un mapa.



Figura 10. Actividad del examen cooperativo rincón 3.

- Rincón 4: Aplicación de proporcionalidad inversa
- Rincón 5: Aplicación de proporcionalidad directa.
- Rincón 6: visualización del porcentaje con cartas.

6.1.2. Examen cooperativo de parejas de funciones, en la que los alumnos deben asociar una gráfica a un enunciado de un problema.

Analizamos funciones en 1º de ESO utilizando el formato de examen cooperativo. Para cada grupo cooperativo se reparten por separado 6 enunciados y 5 gráficas. Los alumnos analizan, deciden y completan las gráficas asociándolas a los enunciados. Queda un enunciado sin gráfica y deben dibujar la gráfica.

Hay más ejemplos de exámenes cooperativos publicados en www.conectadosalasmates.com

7. Nuestro papel como profesores.

- Provocar conflictos cognitivos, discusiones matemáticas, justificación de respuestas, análisis de resultados, etc.
- Detectar el avance del grupo. Intervenir sólo si es necesario.
- Observar si existen dificultades en las interacciones y resolverlas.
- Darles autonomía.
- Confiar en ellos y en sus capacidades.
- No permitir que ningún estudiante domine las tareas, excluyendo o limitando las contribuciones de los demás.
- Motivar hacia el aprendizaje.

8. Conclusiones.

El trabajo cooperativo mejora la enseñanza de las matemáticas, ya que se presentan escenarios en los que los alumnos interactúan, confrontando ideas, estimulando el pensamiento. Se les ofrece un espacio y un tiempo para que hablen de Matemáticas, fomentando discusiones, favoreciendo el aprendizaje con metodologías activas. Se les da la oportunidad de hacer ver a los alumnos como auténticos resolutores de problemas, y lo que decimos los docentes cuando hablamos de innovación educativa: damos a los alumnos el papel de protagonistas de su propio aprendizaje.

Bibliografía

- Paloma Gavilán Bouzas. (2004) *Álgebra en Secundaria*. Madrid. Narcea Ediciones.
- Pere Pujolàs y José Ramón Lago (1994) *El programa AC/CA ("Cooperar para Aprender/Aprender a Cooperar") para Enseñar a aprender en equipo*. Vic. Universidad Vic.
- David W Johnson - Roger T. Johnson. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. Buenos Aires. Paidós SAICF
- Benjamin S. Bloom (1972). *Taxonomía de los objetivos de la educación*. Buenos Aires. El ateneo.



El trabajo cooperativo en Matemáticas

I. García Esteban

P. Biniés Lanceta (2008) *Conversaciones matemáticas con Maria Antònia Canals*. Barcelona.

Editorial Grao.

Francisco Zariquiey (2016) *Cooperar para aprender*. Madrid: SM

Isabel García Esteban. Colegio San Vicente de Paúl, Benavente (Zamora). Licenciada en Biología (2000) por la Universidad de León. Desde 2003 profesora de Matemáticas de Secundaria. Miembro de Innoducation (asociación de Innovación Educativa) y formadora externa de Ieducando.
Email: mariaisabel.garcia@sanvicentebenavente.es